# A Test for the Fundamental Group of a 3-Manifold (3 and 4-Dimensional Manifolds)

AUTHOR(S):

河内, 明夫

CITATION:

河内, 明夫. A Test for the Fundamental Group of a 3-Manifold (3 and 4-Dimensional Manifolds). 数理解析研究所講究録 1982, 467: 14-23

ISSUE DATE:

1982-09

数理解析研究所講究録
467巻 1982年 14-23



# A test for the fundamental group of a 3-manifold

阪市大 理 河内明夫

(Akio Kawauchi)

どのような有限表示群も必ずある$n$次元有向連結閉多様体の基本群に同型であることはよく知られる。一方，それは必ずしも3次元コンパクト多様体の基本群に同型になるとは限らない。ある与えられた有限表示群がいつ3次元コンパクト多様体の基本群に同型になるかを決定することは難しい問題である。例えば，Lyndon-Schupp [6, p192] によって，一般の有限表示群が3次元コンパクト多様体の基本群に同型であるかどうかを決定するアルゴリズムが存在しないことがわかる。(この事実は Gonzalez-Acũna によって筆者にほのめかされた。)

この報告では，無限位数の元をもつ有限表示群がどの3次元コンパクト多様体の基本群にも同型になれないことをテストする方法を与える。筆者は [3], [4] においても同様の研究を行ったが，当報告がほぼその最終的な形となった。(詳しくは [5] 参照のこと。)

## 1. 無限巡回商群をもつ群から生成された加群

$\langle t\rangle$ を文字 $t$ で生成された無限巡回群で, $Z\langle t\rangle$ をその整係数群環とする。epimorphism $\gamma : K\to\langle t\rangle$ をもつ群 $K$ を考える。$\gamma$ の核を $\tilde{K}$ とかく。

今 $K$ の群表示 $(x_0, x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_m)$ ($n\leq+\infty$, $m\leq+\infty$) で $\gamma(x_0)=t$, $\gamma(x_j)=1$ ($\forall j\geq 1$) となるものを考える。$\{r_1^*, \cdots, r_m^*\}$ を $\bigoplus_m Z\langle t\rangle$ の自由生成系, $\{x_0^*, x_1^*, \cdots, x_n^*\}$ を $\bigoplus_{n+1} Z\langle t\rangle$ の自由生成系とする。$Z\langle t\rangle$-列

$$\bigoplus_m Z\langle t\rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{n+1} Z\langle t\rangle \xrightarrow{d_1} Z\langle t\rangle$$

を $d_2(r_i^*)=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma} x_j^*$, $d_1(x_j^*)=\gamma(x_j)-1$ で定義する。そのとき, $d_1 d_2=0$ が成立する。$K$ の群表示のわれわれの選択により $d_1(x_0^*)=t-1$, $d_1(x_j^*)=0$ ($\forall j\geq 1$). 従って, $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_0}\right)^{\gamma}=0$ ($\forall i\geq 1$), $\mathrm{Ker}\, d_1=\bigoplus_n Z\langle t\rangle$, ここで $x_i^*$ は $\bigoplus_n Z\langle t\rangle$ の $i$ 番目の自由因子を生成する ($1\leq i\leq n$)。とくに $d_2$ は写像 $d_2' : \bigoplus_m Z\langle t\rangle \longrightarrow \bigoplus_n Z\langle t\rangle$ を決定する, ここで $d_2'(r_i^*)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma} x_j^*$. Crowell の結果により, $H_1(\tilde{K}; Z)$ は $\mathrm{Ker}\, d_1/\mathrm{Im}\, d_2=\bigoplus_n Z\langle t\rangle/\mathrm{Im}\, d_2'$ に $Z\langle t\rangle$-同型である。$J$ をその $(i,j)$ 成分が $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\gamma}$ であるような行列とする ($1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$)。そのとき,

次の補題が示された：

<u>補題 1.1</u>. 行列 $J$ は $Z\langle t\rangle$-加群 $H_1(\tilde{X};Z)$ の表示行列である。つまり，次のような $Z\langle t\rangle$-完全列がある：

$$\bigoplus_m Z\langle t\rangle \xrightarrow{J} \bigoplus_n Z\langle t\rangle \longrightarrow H_1(\tilde{X};Z) \longrightarrow 0.$$

<u>系 1.2</u>. $X$ が有限生成ならば，$H_1(\tilde{X};Z)$ は $Z\langle t\rangle$-加群として有限生成となる。

## 2. Alexander 加群と自己相反加群

$Z\langle t\rangle$-加群 $T$ に対し，$Q\langle t\rangle$-加群 $T\otimes_Z Q$ を $T_Q$ で表わし，$Z_p\langle t\rangle$-加群 $T\otimes_Z Z_p$ を $T_p$ とかく，ここで $Z_p$ は素位数 $p$ の体である。整係数 torsion 積 $\mathrm{Tor}_Z(T, Z_p) = \{x\in T \mid px=0\}$ は $T^{(p)}$ と表わされる。$T^{(p)}$ は $Z_p\langle t\rangle$-加群となる。

次は明らか：

<u>補題 2.1</u>. $Z\langle t\rangle$-加群 $T$ が torsion $Z\langle t\rangle$-加群 $\Leftrightarrow$ $T_Q$ が torsion $Q\langle t\rangle$-加群。

定義2.2. 有限生成 torsion $\mathbb{Z}\langle t\rangle$-加群を Alexander 加群という。

例えば、次の補題から容易に Alexander 加群の例を作れる。

補題2.3. 有限生成群 $K$ が $H_1(K;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ であれば、その $\mathbb{Z}\langle t\rangle$-加群 $H_1(\tilde{K};\mathbb{Z})$ は Alexander 加群になる。(証明は略、[4] 参照。)

$R$ を 1 をもつ可換環とし、$T$ を $R\langle t\rangle$-加群とする。$f(t)\in R\langle t\rangle$ $x\in T$ に対し $f(t)\cdot x = f(t^{-1})x$ とおく。これは $T$ に第二の $R\langle t\rangle$-加群構造を与える。それを $T^*$ とかく。

定義2.4. 有限生成 $\mathbb{Z}\langle t\rangle$-加群 $T$ は次を満たすとき、自己相反的であるという:

(i) $T_{\mathbb{Q}}\cong T_{\mathbb{Q}}^*$ ($\mathbb{Q}\langle t\rangle$-加群として),

(ii) $\forall$素数 $p$ で $T^{(p)}\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p\langle t\rangle}[T_p, \mathbb{Z}_p\langle t\rangle]^*$ ($\mathbb{Z}_p\langle t\rangle$-加群として).

Alexander 加群 $T$ に対し、$A(t)\in\mathbb{Q}\langle t\rangle$ を $t: T_{\mathbb{Q}}\to T_{\mathbb{Q}}$ の特性多項式とする。$\mathbb{Q}\langle t\rangle$ の unit 倍を無視して考えたときの $A(t)$ のことを Alexander 加群 $T$ の Alexander

多項式という。$Q\langle t\rangle$ が PID であることから，$A(t)$ は $T_Q$ の巡回的 $Q\langle t\rangle$-分解の位数イデアルの生成元である。

補題2.5. 性質(i)をもつ Alexander 加群 $T$ に対し，その Alexander 多項式 $A(t)$ は自己相反的である。即ち，$A(t) = u\,A(t^{-1})$（ある unit $u \in Q\langle t\rangle$ に対して）。

$Z_p\langle t\rangle$ は PID で，$T_p$ は $Z_p\langle t\rangle$ 上有限生成だから，次を知る。

補題2.6. 性質(ii)をもつ Alexander 加群 $T$ に対し，$T^{(p)}$ は自由 $Z_p\langle t\rangle$-加群で，その階数は $T_p$ のものに等しい。とくに $T^{(p)}$ はアーベル群として trivial かまたは無限群になる。

3. 3次元多様体の基本群のいくつかの性質.

とくに断らない限り，多様体とは三角形分割され得る多様体を意味する。

3.1. 3次元多様体の基本群の任意の部分群 $G$ は 3次元多様体 $M'$（即ち，$G$ に対応した $M$ の被覆）の基本群であ

る。さらに，もし $G$ が有限生成ならば，$M'$ はコンパクトとでき，$G$ は有限表示群になる。また，$M$ が有向なら，$M'$ もまた有向。(Hempel [1, Chapter 8], Jaco [2, CHAPTER V] 参照。)

補題3.2. $G=\pi_1(M)$ が有限生成群ならば，$G$ は無限位数の元をもつ。(これは [4, (2.3)] の対偶．証明はそこを参照。)

$M$ を 3次元コンパクト有向多様体で，epimorphism $\gamma: \pi_1(M) \to \langle t \rangle$ が与えられているとする。$\tilde{M}$ を $\mathrm{Ker}\,\gamma$ に対応する $M$ の被覆とする．$\tilde{M}$ の被覆変換群は $\langle t \rangle$ と同一視される。ホモロジー群 $H_1(\tilde{M}; Z)$ は自然な有限生成 $Z\langle t \rangle$-加群構造をもつ。

定理3.3. $\dim_Q H_1(\tilde{M}; Q) < +\infty$ のとき，$Z\langle t \rangle$-加群 $H_1(\tilde{M}; Z)$ は自己相反的である．(証明は [4, 定理6.1] 又は [5] を参照。)

4. 主定理。

$G$ を $H_1(K; Z)$ が無限となる有限生成部分群 $K$ を含んだ群とする。Alexander 加群 $T$ がある epimorphism $\gamma: K \to \langle t \rangle$ により $K$ から生成されたと仮定する。

定義4.1. そのAlexander加群 $T$ は群 $G$ の中で産出されたという。

次が主定理である:

定理4.2 $G$ を無限位数の元をもつ群とする。

(1) $G$ が3次元有向多様体の基本群に同型と仮定する。そのとき, $G$ の中で産出されるどのAlexander加群も自己相反的である。

(2) $G$ が3次元無向多様体の基本群に同型と仮定する。その時, $G$ には指数2の部分群 $G'$ が存在して, その中で産出されるどのAlexander加群も自己相反的である。

(証明) $K$ を $G$ の有限生成部分群で, ある $\gamma: K \to \langle t \rangle$ によりAlexander加群 $H_1(\tilde{K};Z)$ を生成していると仮定する。(1)の場合, 3.1から $K \cong \pi_1(M)$, ここで $M$ は3次元コンパクト有向多様体。$\mathrm{Ker}\,\gamma$ に対応した $M$ の被覆 $\tilde{M}$ とすれば, $Z\langle t\rangle$-同型 $H_1(\tilde{K};Z) \cong H_1(\tilde{M};Z)$ がある。$\dim_Q H_1(\tilde{K};Q) = \dim_Q H_1(\tilde{M};Q) < +\infty$ より定理3.3が使えて, $H_1(\tilde{K};Z)$ が自己相反的であることがわかる。(2)の場合, $G$ はその3次元無向多様体のorientation二重被覆である3次元有向多様体

の基本群になる指数2の部分群$G'$を必ずもつ。$G'$に(1)を適用する。(証明終)

<u>4.3 テスト計画</u>。群$G$とその有限生成部分群$K$ ($K=G$でもよい)と$K$の(無限でもよい)群表示$P_K$とepimorphism $\gamma: K \to \langle t \rangle$が与えられていると仮定する。$K \cong Z$ならば、$Z = \pi_1(S^1 \times S^2)$なのでテストは失敗する。$K \not\cong Z$と仮定する。そのとき、$Z\langle t \rangle$-加群$H_1(\tilde{K}; Z)$がAlexander加群かどうかを群表示$P_K$と補題1.1から調べる。例えば、補題2.3により$H_1(\tilde{K}; Q) \cong Q$ならば$H_1(\tilde{K}; Z)$はAlexander加群。Alexander加群の場合、$H_1(\tilde{K}; Z)$が自己相反的かどうかを調べる。もし自己相反的でないならば、定理4.2 (1)より$G$はどの3次元有向多様体の基本群にも同型にならない。次に無向の場合のために、$H^1(G; Z_2) \neq 0$で$G$の指数2のすべての部分群$G_i$ ($i \in I$)が与えられているとする。($H^1(G; Z_2) = 0$ならば、定理4.2 (2)より$G$は無向多様体の基本群に同型になれない。) さらに、各$i$で$G_i$の有限生成部分群$K_i$ ($K_i = G_i$でもよい)とその(無限でもよい)群表示$P_{K_i}$及びepimorphism $\gamma_i: K_i \to \langle t \rangle$が与えられていると仮定する。もし各$i$で、$(K_i, \gamma_i)$が非自己相反Alexander加群を産出しているならば、定理

4.2(2)からGはどの3次元無向多様体の基本群にも同型とならない。この場合，定理4.2(1)によって，Gはどの3次元有向多様体の基本群にも勿論同型でない。

<u>例4.4</u>．0でない整数$\ell, m$と素数$p \geq 2$に対し，群$G = G(\ell, m; p) = (a, b \mid a^{-1}b^{\ell}a = b^{m}, b^{p} = 1)$が3次元多様体の基本群$\Longleftrightarrow p \mid 2\ell m$．

（証明）$p \nmid 2\ell m$のときGはどの3次元多様体の基本群とも同型でないことのみ示す。このとき$H^1(G; Z_2) = Z_2$だから，Gはただ1つの指数2の部分群$G'$をもつ。Reidemeister-Schreierの方法から$G'$は表示$(a, b_1, b_2 \mid a^{-1}b_1^{\ell}a = b_2^{m}, b_1^{m} = b_2^{\ell}, b_1^{p} = b_2^{p} = 1)$をもつ。epimorphism $\gamma: G' \to \langle t \rangle$を$\gamma(a) = t^{-1}$, $\gamma(b_1) = \gamma(b_2) = 1$で定める。補題1.1より$H_1(\tilde{G}'; Z) \cong Z_p\langle t \rangle / (\ell^2 t - m^2)$ ($\cong Z_p$，アーベル群と見た場合)。これはAlexander加群で，補題2.6より自己相反的でない。定理4.2よりGはどのような3次元多様体の基本群とも同型とならない。

参考文献

[1] J. Hempel, 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies 86 (1976).

[2] W. Jaco, Lectures on Three-Manifold Topology, Regional Conference Series in Math. 43 (1980).

[3] 河内, 3-manifold の fundamental group, 第3回代数セミナー報告, 80-141 (1980).

[4] 河内, 3次元多様体の基本群とAlexander加群, シンポジウム「無限群の表現とその応用」報告集, 104-117 (1982).

[5] A. Kawauchi, A test for the fundamental group of a 3-manifold, Journal of Pure and Applied Algebra (to appear).

[6] R.C. Lyndon - P.E. Schupp, Combinatorial Group Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag, 1977.